

MENENTUKAN KEANDALAN PADA MODEL STRESS-STRENGTH DARI SATU KOMPONEN

ROSMAN SIREGAR

Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan
Jurusan Matematika
Universitas Sumatera Utara

PENDAHULUAN

Persaingan yang semakin ketat di dunia bisnis dan industri menuntut adanya rekayasa produk yang mencakup hampir semua aspek. Salah satu aspek yang selalu menjadi pertimbangan konsumen adalah kualitas dan keandalan dari suatu produk tersebut, dimana keandalan tersebut tidak terlepas dari komponen-komponen pembentuknya. Tingkat keandalan suatu komponen ditetapkan pada masa perancangan. Agar keandalan komponen dapat ditentukan (dikalkulasikan) pada tahap perancangan maka diperlukan suatu metodologi yang bersifat probabilistik yang dikenal dengan perancangan probabilistik.

Perancangan probabilistik tersebut mencakup variabel dan parameter, yang dalam hal ini dengan menentukan distribusi *stress* dan *strength*. Pendekatan untuk keandalan komponen tersebut dapat diekspresikan sebagai distribusi *stress* dan *stengh* (dan parameternya). Dalam menentukan keandalan komponen ini, Langkah pertama yang harus diperhatikan adalah hal-hal yang mempengaruhi perhitungan *stress* dan *strength*. Untuk *strength* haruslah diperhatikan sifat-sifat dari material yang dipergunakan dan distribusi peluang dari fakto-faktor yang mempengaruhi *strength*. Begitu juga untuk *stress*, faktor-faktor yang mempengaruhinya juga diperhatikan seperti konsentrasi *stress* dan temperatur.

Keandalan suatu komponen sering diartikan sebagai peluang komponen akan berfungsi dengan baik jika dioperasikan dalam kondisi lingkungan tertentu. Artinya daya tahan atau tingkat kekuatan (*strength*) komponen dalam menghadapi *stress* yaitu gaya atau tekanan yang terjadi dalam suatu lingkungan tertentu seperti tekanan angin, tekanan ledakan, tekanan akibat kenaikan suhu, tekanan beban dan sebagainya.

Jadi keandalan pada model *stress-strength* ini didefinisikan sebagai probalitas komponen akan berfungsi dengan baik yaitu *strength* komponen lebih besar dari *stress* yang membebani komponen tersebut. Perbedaan dengan pengetian keandalan yang lazim adalah bahwa keandalan pada model *stress-strength* bukan merupakan fungsi waktu.

Bertitik tolak dari permasalahan diatas maka penulis meraa tertarik untuk mengadakan suatu literatur tentang keandalan komponen pada model *stress-strength*

LANDASAN TEORI

2.1 Sejarah Teori Keandalan

Keandalan dalam pengertian yang luas dapat dikatakan sebagai ukuran prestasi. Seseorang yang mampu menyelesaikan pekerjaannya dengan baik pada waktu yang telah ditentukan maka orang tersebut dikatakan dapat diandalkan.

Konsep keandalan tidak hanya dipakai dalam kegiatan manusia, tetapi prestasi fungsional dari objek yang dibuat manusia seperti peralatan ataupun komponen elektronik, komponen mesin dan sebagainya.

Suatu bagian fungsional mempunyai prestasi tertentu, misalnya suatu spesifikasi yang dibutuhkan. Jika dalam suatu keadaan, keadaan fungsional tadi mencapai prestasi yang ditentukan, atau bahkan melebihinya, maka secara kualitatif dikatakan "dapat diandalkan". Jika bagian tadi gagal atau hampir selalu gagal mencapai prestasi yang dibutuhkan, maka secara kualitatif dikatakan "tidak dapat diandalkan". Dengan demikian keandalan adalah ukuran dari tingkat keberhasilan prestasi suatu objek dalam suatu keadaan operasi yang dibutuhkan, karena itu perlu dilakukan kuantifikasi terhadap keandalan.

Konsep keandalan pada mulanya dikembangkan oleh A.K.Erlang dan C. Palm Yang ditujukan untuk mengatasi masalah yang terjadi pada telepon. Pada tahun 1930, konsep keandalan dinyatakan dalam jumlah rata-rata tingkat kegagalan untuk pesawat terbang. Pada tahun 1940 tingkat kecelakaan rata-rata pada pesawat terbang tidak boleh lebih dari satu kecelakaan dalam setiap 100.000 jam terbang, dalam tahun yang sama analisa keandalan dipakai pula dalam peralatan perang. Umumnya konsep keandalan digunakan pada konsep keandalan yang berisiko tinggi dan membahayakan. Pada saat ini konsep keandalan juga digunakan dalam industri listrik, mesin, kimia, sistem organisasi dan transportasi.

2.2 Konsep Dasar Teori Peluang

Berbicara masalah keandalan tidak terlepas dari masalah peluang (probabilitas). Hal ini disebabkan karena keandalan itu sendiri merupakan probabilitas suatu komponen beroperasi dengan sukses sesuai dengan fungsinya pada selang waktu dan kondisi yang telah ditentukan. Karena itu sebelum membahas keandalan, ada baiknya terlebih dahulu memahami konsep dasar teori peluang. Berikut akan diberikan beberapa pengertian dasar.

2.2.1 Definisi Peluang

Definisi 2.2.1.1

Gugus semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan Ω disebut ruang sampel dan dinyatakan dengan lambang S. Tiap hasil dari ruang sampel disebut unsur atau titik sampel.

Definisi 2.2.1.2

Ruang nol atau ruang hampa ialah himpunan bagian ruang sampel yang mengandung unsur. Himpunan ini dinyatakan dengan lambang \emptyset .

Definisi 2.2.1.3

Misalkan sebuah peristiwa E dapat terjadi sebanyak n kali (frekuensi relatif) diantara N pengamatan yang saling eksklusif, maka peluang peristiwa itu adalah limit dari frekuensi relatif apabila jumlah pengamatan diperbesar sampai tak hingga banyaknya dan ditulis dalam bentuk

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{N}$$

Definisi 2.2.1.4

1. Untuk sembarang peristiwa E, $P(E) \geq 0$
2. $P(S) = 1$
3. $0 \leq P(E) \leq 1$

Jika $P(E) = 0$ maka diartikan peristiwa E mustahil akan terjadi, sedangkan jika $P(E) = 1$ diartikan peristiwa E pasti terjadi. Yang sering terjadi dalam kenyataan, ialah harga $P(E)$ antara 0 dan 1. Jika $P(E)$ dekat sekali pada nol, sering diartikan bahwa peristiwa E praktis tidak akan terjadi dan dalam hal $P(E)$ dekat sekali dalam satu, biasa dikatakan bahwa peristiwa E praktis terjadi.

Definisi 2.2.1.5

Jika kejadian dari sebuah peristiwa E_1 tidak mempengaruhi kejadian peristiwa E_2 yang lain, maka peristiwa E_1 dan E_2 dikatakan bebas secara statistik (saling bebas). Peluang kejadian bersama kedua peristiwa tersebut dinyatakan dengan

$$P(E_1 \cdot E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

2.2.2 Variabel Acak dan Distribusi

Definisi 2.2.2.1

Jika sebuah percobaan yang memiliki ruang sampel S, dan X sebuah fungsi yang dinotasikan sebuah bilangan riil $X(e)$ untuk setiap hasil $e \in S$, kemudian $X(e)$ disebut variabel acak. Jenis variabel acak ada dua yakni variabel acak diskrit dan variabel acak kontinu.

Definisi 2.2.2.2

Jika suatu riang sampel S mengandung titik sampel yang berhingga banyaknya atau suatu deretan anggota yang banyaknya sama dengan banyak bilangan bulat, maka ruang sampel itu disebut ruang sampel diskrit, Variabel acak yang didefinisikan pada ruang sampel adalah variabel acak diskrit.

Definisi 2.2.2.3

Variabel acak kontinu menyatakan data yang diukur seperti tinggi, jarak atau jangka hidup yang mungkin dari suatu produk dan lain-lain sehingga sering digunakan dalam permasalahan keandalan seperti distribusi normal dan eksponensial.

Definisi 2.2.2.4

Fungsi f adalah fungsi peluang atau distribusi peluang X variabel acak diskrit bila, untuk setiap hasil x yang mungkin;

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$
3. $P(X=x) = f(x)$

Definisi 2.2.2.5

Fungsi distribusi kumulatif F_x suatu X variabel acak dengan fungsi peluang f Dinyatakan oleh :

$$F_x(X) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

Definisi 2.2.2.6

Fungsi f adalah fungsi densitas peluang X variabel acak kontinu yang didefinisikan atas himpunan semua bilangan riil R , bila :

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
4. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$

Definisi 2.2.2.7

Fungsi distribusi kumulatif F_x suatu X variabel acak kontinu dengan fungsi densitas peluang f yang diberikan oleh :

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Akibatnya dapat diturunkan :

$$P(a < X < b) = F_x(b) - F_x(a) \text{ dan}$$

$$f(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} \quad \dots \text{bila turunan fungsi ini ada}$$

Bukti:

$$1. P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(t) dt - \int_{-\infty}^a f(t) dt = F_x(b) - F_x(a)$$

$$2. \text{ Jika } f(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}$$

$$f(x) dx = dF_x(X) \text{ dan } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dF_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(\infty) = 1$$

$$f(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} \quad \dots \text{bila turunan fungsi ini ada}$$

Untuk X variabel acak kontinu berlaku :

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

2.2.3 Ekspektasi (mean) dan Variansi

Definisi 2.2.3.1

Andaikan bahwa variabel acak diskrit yang mana fungsi peluangnya adalah f , ekspektasi dari f dinotasikan dengan $E(X)$ adalah bilangan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$E(X) = \sum_x xf(X)$$

Definisi 2.2.3.2

Jika X variabel acak kontinu yang mana fungsi densitas peluangnya adalah f , maka ekspektasi $E(X)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

Bilangan $E(X)$ disebut juga nilai harapan dari x atau mean dari X , dan istilah-istilah ekspektasi, nilai harapan, dan mean dapat dipakai secara bertukaran.

Definisi 2.2.3.3

Andaikan bahwa X variabel acak dengan mean $\mu = E(X)$, variansi dari x dinotasikan dengan $\text{var}(X)$ atau simbol σ^2 didefinisikan sebagai berikut:

$$\text{Var}(X) = E[(x - \mu)^2]$$

Karena $\text{var}(X)$ adalah nilai ekspektasi dari variabel acak non-negatif $(x - \mu)^2$, ini menyatakan $\text{var}(X) \geq 0$. Variansi dari distribusi memberikan ukuran penyebaran dari distribusi disekitar mean μ . Variansi sebuah distribusi bernilai kecil menunjukkan bahwa distribusi peluang adalah rapat sekali memusat disekitar μ , dan bernilai besar menunjukkan secara khusus bahwa distribusi peluang mempunyai sebaran yang lebar sekitar μ . Standar deviasi dari variabel acak atau distribusi didefinisikan sebagai akar kuadrat non-negatif dari variansi, dinotasikan dengan simbol σ .

$$\sigma = + \sqrt{\text{var}(X)}$$

2.2.4 Distribusi Peluang

Ada beberapa distribusi peluang (model-model analitik) untuk menggambarkan beberapa jenis dari variabel acak dan kontinu, diantaranya distribusi normal, eksponensial, log normal, gamma dan weibull. Semua distribusi ini sering digunakan dalam menentukan peluang kegagalan suatu komponen.

Definisi 2.2.4.1 Distribusi eksponensial

Untuk harga tertentu parameter α dan β distribusi gamma, khususnya dengan $\alpha = 1$ disebut distribusi eksponensial. Jika X variabel acak kontinu berdistribusi eksponensial dengan parameter β , fungsi densitas peluangnya diberikan oleh:

$$f(x; \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & \dots\dots\dots \text{untuk } x > 0 \\ 0 & \dots\dots\dots \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Mean dan variansi distribusi eksponensial dengan parameter β adalah:

$$\mu = \beta \text{ dan } \sigma^2 = \beta^2$$

Definisi 2.2.4.2 Distribusi Normal

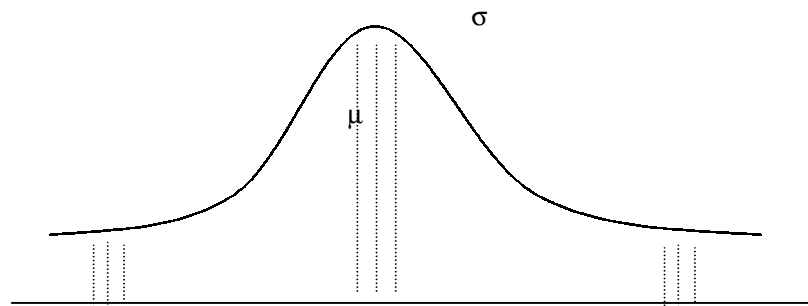
Distribusi peluang kontinu yang sering digunakan dalam keandalan adalah distribusi normal. Grafiknya disebut kurva normal, berbentuk lonceng, menggambarkan berbagai kumpulan data yang muncul di alam, industri dan

penelitian. Pada tahun 1733 Demoisre menemukan persamaan matematika kurva normal yang menjadi dasar banyak teori statistik induktif. Distribusi normal sering pula disebut distribusi gauss untuk menghormati Gauss (1777 – 1855) yang juga menemukan persamaannya waktu meneliti galat dalam pengukuran yang berulang-ulang mengenai baha yang sama.

Jika X variabel acak kontinu berdistribusi normal, dengan parameter μ dan σ^2 diberikan oleh :

$$f(x; \mu; \sigma^2) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 [(x-\mu)/\sigma]^2} & \dots\dots\dots \text{untuk } -\infty < x < \infty \\ 0 & \dots\dots\dots \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

dengan $e = 2,71828\dots$ dan $\pi = 3,14159$



Gambar 2.1. Kurva Normal

Begitu mean μ dan simpangan baku σ diketahui, maka seluruh kurva normal diketahui. Dengan mengamati grafik serta memeriksa turunan pertama dan kedua dari $f(x; \mu; \sigma^2)$ dapat diperoleh lima sifat kurva normal sebagai berikut :

1. Modus, titik pada sumbu datar yang memberikan maksimum kurva, terdapat pada $x = \mu$
2. Kurva setangkup terhadap garis tegak yang melalui mean μ .
3. Kurva mempunyai titik belok ada $x = \mu \pm \sigma$, cekung dari bawah bila, $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$, dan cekung dari atas untuk harga X lainnya.
4. Kedua ujung kurva normal mendekati asimtot sumbu datar bila harga x bergerak menjauhi μ baik ke kiri maupun ke kanan.
5. Seluruh luas di bawah kurva normal dan di atas sumbu datar sama dengan 1.

Mean dan Varians distribusi normal $f(x; \mu; \sigma)$ adalah :

$$E(X) = \mu \text{ dan } \text{Var}(X) = \sigma^2$$

Definisi 2.2.4.3. Distribusi Normal Standard

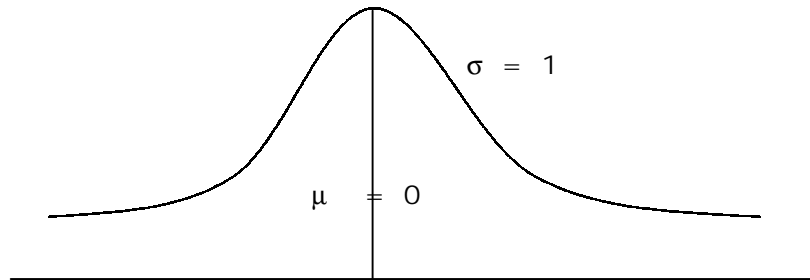
Distribusi normal dengan mean 0 dan Variansi 1 disebut distribusi normal standard. Fungsi densitas peluang dari distribusi normal standard adalah biasa dinyatakan dengan simbol ϕ , dan fungsi distribusinya dinotasikan dengan simbol Φ

$$\phi(x) = f(x; 0, 1) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 x^2} & \dots\dots\dots \text{untuk } -\infty < x < \infty \\ 0 & \dots\dots\dots \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Dan

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(u) du \quad \dots\dots \text{untuk } -\infty < x < \infty$$

dimana simbol u yang dipakai dalam persamaan di atas sebagai Variabel dummy dari integrasi.



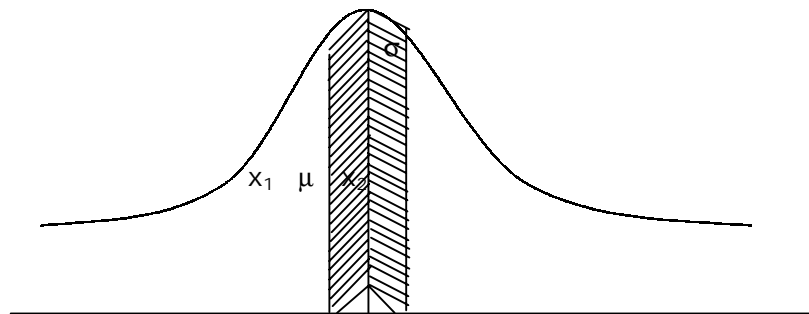
Gambar 2.2. Kurva Normal Standart

Definisi 2.2.4.4. Luas Dibawah Kurva Normal

Kurva setiap distribusi peluang kontinu atau fungsi densitas dibuat sedemikian rupa sehingga luas dibawah kurva diantara dua ordinat $X = x_1$ dan $X = x_2$, sama dengan peluang X variabel acak mendapat harga antara $X = x_1$ dan $X = x_2$, jadi untuk kurva normal pada gambar 2.3,

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x; \mu; \sigma) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-1/2 \left[\frac{x - \mu}{\sigma} \right]^2} dx$$

dinyatakan dengan luas daerah yang diarsir.



Gambar 2.3. $P(x_1 < X < x_2) =$ Luas daerah yang diarsir

Untuk mengatasi kesulitan dalam menghitung integrasi fungsi normal maka, dibuat *tabel luas kurva normal* sehingga memudahkan penggunaannya. Akan tetapi, tidak akan mungkin membuat tabel yang berlainan untuk setiap harga μ dan σ . Maka untuk seluruh pengamatan dengan setiap X variabel acak normal dapat ditransformasikan menjadi himpunan pengamatan baru suatu Z variabel acak baru dengan *mean 0 dan variansi 1*. Hal ini dapat dikerjakan dengan transformasi :

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Bilamana X mendapat suatu harga x_1 , harga Z padanannya diberikan oleh $Z = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$

Jadi, bila X berharga antara $X = x_1$ dan $X = x_2$, maka Z variabel acak akan berharga

$Z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$ dan $Z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$, karena itu dapat ditulis;

$$\begin{aligned} P(x_1 < X < x_2) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-1/2 \left[\left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-1/2 z^2} dz = \int_{z_1}^{z_2} \phi(z) dz \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \phi(z) dz - \int_{z_1}^{z_1} \phi(z) dz \\ &= \phi(z_2) - \phi(z_1) \end{aligned}$$

Dimana, $\phi(z_i)$ menunjukkan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal standard untuk taksiran Z_i sedemikian $\phi(z_i) = p_i$ dan $Z_i = \phi^{-1}(p_i)$, dengan p adalah peluang kumulatif.

(Tabel distribusi normal standart tertera pada halamam lampiran)

Definisi 2.2.4.3 Distribusi Log Normal

Fungsi kepadatan peluang log normal adalah

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]; \sigma > 0, -\infty < x < +\infty$$

Dimana μ dan σ merupakan parameter, dengan $-\infty < \mu < +\infty$ dan $\sigma > 0$

Jika variabel random didefinisikan sebagai $x = \ln y$, maka x akan berdistribusi normal dengan mean μ dan standar deviasi dengan σ dengan

$$E(x) = E(\ln y) = \mu, \text{ dan}$$

$$V(x) = V(\ln y) = \sigma^2$$

Dari $y = e^x$, maka mean dari distribusi log normal dapat dicari dengan menggunakan distribusi normal.

$$\begin{aligned} E(y) = E(e^x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[x - \frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx \\ &= \exp \left[\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[x - (\mu + \sigma^2) \right]^2 \right\} dx \end{aligned}$$

Jadi mean dari distribusi log normal adalah

$$E(y) = \exp \left[\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right]$$

dan

$$E(y^2) = E(e^{2x}) = \exp \left[2\left(\mu + \sigma^2\right)\right]$$

sehingga variansi dari log normal adalah

$$V(y) = \sigma^2 = \exp \left[2\mu + \sigma^2 \right] \left[\exp(\sigma^2) - 1 \right]$$

sedangkan fungsi distribusi kumulatif log normal adalah

$$F(y) = \int_0^y \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] dy ; y > 0$$

Definisi 2.2.4.4. Distribusi Gamma

Suatu variabel acak random X dikatakan berdistribusi gamma dengan parameter α dan β ($\alpha > 0$ dan $\beta > 0$) jika X berdistribusi kontinu yang mana fungsi kepadatan peluang $f(x | \alpha, \beta)$ dinyatakan dengan :

$$f(x | \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \dots\dots\dots \text{untuk } x > 0 \\ 0 & \dots\dots\dots \text{untuk } x \leq 0 \end{cases}$$

Integral dari fungsi kepadatan peluang ini adalah 1. Dari definisi fungsi gamma diketahui bahwa

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}$$

Adapun ekspektasi dari distribusi gamma adalah $E(x) = \frac{\alpha}{\beta}$ dan variansinya

$$\text{adalah } \text{Var}(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Definisi 2.2.4.5 Distribusi Weibull

Distribusi Weibull didefinisikan sebagai fungsi dengan tiga parameter fungsi kepadatan peluangnya adalah

$$f(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) (x-\gamma)^{\beta-1} \exp \left\{ -(x-\gamma)^{\beta/\alpha} \right\} ; x \geq \gamma, \gamma \geq 0; \alpha > 0$$

Dimana α = parameter skala
 β = parameter bentuk
 γ = parameter lokasi

$$\text{Mean} = \mu = \alpha^{1/\beta} \tau \left(1 + \frac{1}{\beta} \right), [\gamma = 0]$$

$$\text{Variansi} = \sigma^2 = \alpha^{2/\beta} \left[\tau \left(1 + \frac{2}{\beta} \right) - \left\{ \tau \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right\}^2 \right], \quad [\gamma=0]$$

$$F(x) = 0, \quad x < \gamma$$

$$= 1 - e^{-(x-\gamma)^{\beta/\alpha}}; \quad x \geq \gamma \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

Distribusi Weibull akan menjadi distribusi eksponensial jika $\beta = 1$ dan $\gamma = 0$

KEANDALAN KOMPONEN

3.1 Konsep Dasar Keandalan Komponen

Didalam merancang suatu komponen, yang menjadi perhatian utama adalah menentukan sejauh manakah tingkatan resiko kegagalan masih dapat diterima baik dari segi ekonomi maupun akibatnya dalam kehidupan sosial. Penyelesaian permasalahan diatas disebut analisa kuantitatif dari sistem *keandalan* dan *keamanan*.

Kata *keamanan* di sini maksudnya keamanan yang mutlak artinya komponen tidak akan pernah mengalami kerusakan selama beroperasi.

Sementara itu philosophy dari operasi komponen merupakan dasar untuk merancang berbagai jenis mesin. Angka parameternya dapat berupa tegangan, hambatan, usaha, gaya, torque, kecepatan, kelembaban, suara, temperatur dan lain-lain. Nilai dari angka parameter yang telah disebutkan itu berhubungan erat dengan keamanan. Secara umum komponen yang dipilih mempunyai angka yang telah ditetapkan, misalnya temperatur mungkin 200°K , tegangan mungkin 230 V dan hambatan $5\ \Omega$. Angka-angka itu ditetapkan berdasarkan test dari komponennya, sehingga fungsinya akan aman di bawah kondisi tersebut.

Metode dari suatu komponen untuk operasi di bawah kondisi lingkungan yang terdiri dari evaluasi keandalan dari angka-angka kegagalan dari berbagai tingkat kesukaran operasi bila keandalan data di bawah kondisi angka yang diketahui.

Keandalan dari berbagai komponen menurun secara cepat bila dioperasikan lebih tinggi dari angka temperaturnya atau lebih tinggi dari angka tegangan dan hambatannya. Maksudnya bila dioperasikan lebih tingginya stressnya dari angkanya maka angka kegagalan akan meningkat. Contoh, persamaan Arrhenius telah membuktikan bahwa kegagalan akan dua kali lipat bila komponen dioperasikan pada temperatur 10°C , lebih tinggi dari angka temperaturnya.

Konsep dasar keandalan komponen adalah menghasilkan suatu komponen yang mempunyai kapasitas stress tertentu, jika stress tersebut disebabkan oleh kondisi operasi yang melebihi kapasitas kegagalan. Aturan pendekatan desain yang didasarkan pada penggunaan *safety factors* (*faktor keamanan*), memberikan indikasi yang kecil dari peluang kegagalan suatu komponen. Beberapa desainer meyakini bahwa kegagalan komponen akan dapat dihapuskan sama sekali dengan pemakaian *safety factor*. Namun pada kenyataannya peluang kegagalan mungkin berubah-ubah dari yang lebih rendah hingga ke sebuah nilai yang lebih tinggi yang tidak tetap untuk safety factor yang sama. Pemakaian safety factor hanya digunakan ketika nilainya didasarkan pada suatu percobaan dengan bagian-bagian yang sama. Lebih lanjut, variabel dan parameter desain yang merupakan variabel random, pada kenyataannya dapat diabaikan sama sekali dengan aturan desain pendekatan.

Tetapi aturan desain pendekatan tersebut tidaklah mencukupi untuk menentukan keandalan yang tepat. Karena itu, diperlukan penggunaan metodologi desain yang bersifat probabilistik yang salah satunya dengan menentukan keandalan berdasarkan stress dan strength karena salah satu yang mempengaruhi laju kegagalan suatu komponen adalah stress atau tekanan.

Untuk komponen itu perlu diperhatikan, langkah pertama yang harus dilakukan adalah melihat hal-hal yang mempengaruhi perhitungan stress dan

strength. Untuk perhitungan strength, harus diberikan sifat-sifat material yang digunakan. Untuk perhitungan stress dilihat masalah statistik dan distribusi peluang dari faktor yang mempengaruhi stress seperti konsentrasi stress dan temperatur. Di samping perhitungan ini, statistik dan distribusi stress dan strength dapat diperoleh. Distribusi ini digunakan untuk menghitung keandalan dari suatu komponen yang didefinisikan bahwa peluang dari strength komponen lebih besar daripada stress yang mempengaruhi komponen itu.

3.2 Keandalan Komponen pada Model Stress – Strength

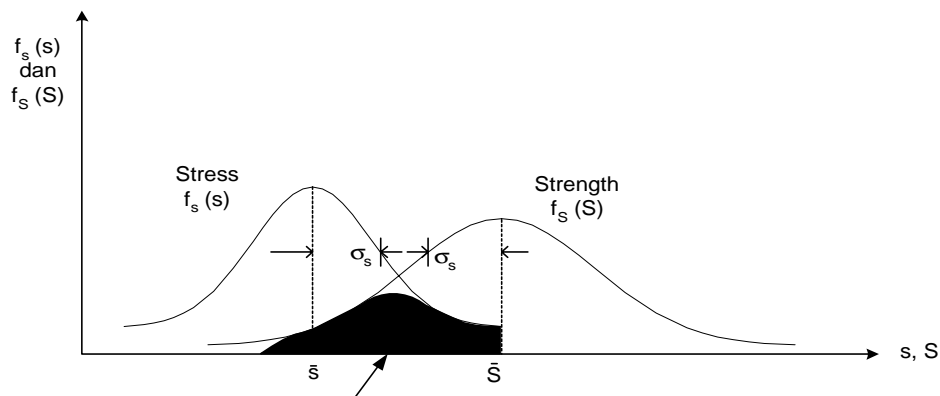
Stress adalah suatu gaya atau tekanan yang terjadi dalam suatu lingkungan tertentu, seperti tekanan angin, tekanan akibat ledakan, tekanan akibat kenaikan suhu udara, tekanan beban dan sebagainya.

Strength adalah kekuatan komponen yang dapat diukur kuantitasnya seperti kekuatan logam, kekuatan sambungan hasil pengelasan, kekuatan komponen elektronik (misalnya transistor dan kapasitor), kekuatan komponen mekanik dan sebagainya.

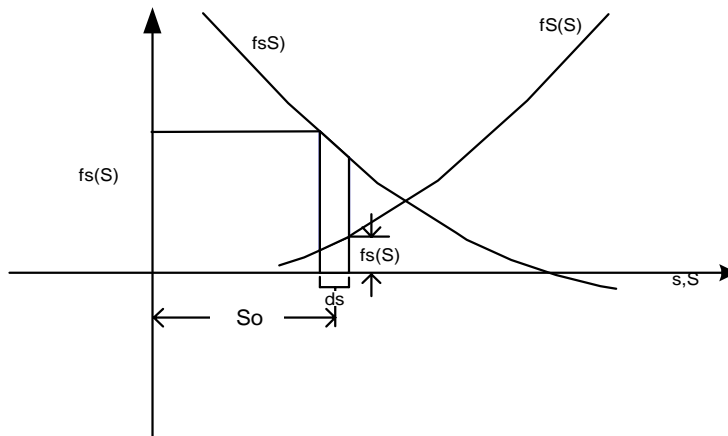
Sedangkan model stress-strength terjadi apabila suatu sistem atau komponen difungsikan atau digunakan dalam lingkungan yang mempunyai tingkat stress tertentu. Misalnya suatu tower penyangga kabel listrik tegangan tinggi didirikan pada suatu daerah yang mempunyai tingkat stress tertentu yaitu tekanan angin, tekanan hujan dan stress akibat gempa bumi.

Keandalan pada model stress-strength didefinisikan sebagai probabilitas komponen berfungsi dengan baik yaitu apabila strength komponen lebih besar dari stress yang membebani komponen tersebut. Perbedaan dengan pengertian keandalan yang lazim adalah bahwa keandalan pada model stress-strength bukan merupakan fungsi waktu.

Nilai keandalan pada model stress-strength dapat dihitung jika sifat dari variabel random stress dan variabel random strength diketahui atau jika fungsi densitas (pdf) variabel random stress dan strength diketahui. Andaikan fungsi densitas untuk strength (S) dinotasikan oleh $f_S(S)$ dan fungsi densitas untuk stress (s) dinotasikan dengan $f_s(s)$ dimana posisi distribusi variabel stress dan variabel strength disajikan dalam gambar berikut :



Gambar 2.4 Interferensi Stress-Strength



Gambar 2.5 Bagian Perluasan-Keandalan dari diagram Interferensi Stress-Strength

Keandalannya didefinisikan sebagai :

$$\text{Keandalan} = R = P(S > s) = P(S - s > 0) \dots\dots\dots(2.1)$$

Bagian yang diarsir pada gambar 2.4 memperlihatkan daerah interferensi yang menunjukkan peluang kegagalan. Untuk lebih jelasnya, daerah interferensi ini dapat dilihat pada gambar 2.5

Peluang dari stress terletak dalam interval yang kecil dengan lebar ds atau daerah dari elemen ds, yaitu:

$$P\left(s_0 - \frac{ds}{2} \leq s \leq s_0 + \frac{ds}{2}\right) = f_s(s_0)ds$$

Peluang dari strength S adalah lebih besar dari stress s yaitu:

$$P(S > s_0) = \int_{s_0}^{\infty} f_s(S)dS$$

Sehingga peluang dari stress yang terletak dalam interval kecil ds dan strength yang melebihi stress dan diasumsikan bahwa stress dan strength variabel acak yang saling independent adalah :

$$P(S > s_0) = f_s(s_0)ds \int_{s_0}^{\infty} f_s(S)dS \dots\dots\dots(2.2)$$

Keandalan komponen merupakan peluang bahwa strength S lebih besar dari pada stress s untuk semua nilai yang mungkin dari stress s, karena itu :

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} f_s(s) \left[\int_s^{\infty} f_s(S)dS \right] ds \dots\dots\dots(2.3)$$

Sebaliknya keandalan tersebut dapat juga ditentukan dengan cara melihat bahwa stress lebih kecil dari strength. Peluang dari strength dalam interval kecil dS adalah :

$$P = \left(S_0 - \frac{ds}{2} \leq S \leq S_0 + \frac{ds}{2} \right) = f_S(S_0)dS$$

dan peluang dari stress yang lebih kecil dari strength adalah:

$$P(s \leq S_0) = \int_{-\infty}^{S_0} f_s(s) ds$$

karena disumsikan bahwa stress dan strength adalah variabel acak yang independent, maka peluang dari strength dalam interval dS dan stress yang tidak melebihi S menjadi :

$$P(s \leq S_0) = f_s(S_0) dS \int_{-\infty}^{S_0} f_s(s) ds \dots\dots\dots (2.4)$$

Karena itu, keandalan komponen untuk semua nilai yang mungkin dari strength S adalah :

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} f_s(S) \left[\int_s^{\infty} f_s(s) \right] dS \dots\dots\dots (2.5)$$

Selanjutnya dapat ditentukan persamaan untuk ketidakandalan (anreliability) yang menyatakan peluang bahwa komponen akan gagal yaitu :

$$\bar{R} = 1 - R = P(S \leq s)$$

Dengan mensubsitusikan R dari persamaan (2.3) diperoleh :

$$\begin{aligned} \bar{R} = P(S \leq s) &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_s(s) \left[\int_s^{\infty} f_s(S) dS \right] ds \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_s(s) [1 - F_s(s)] ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_s(s) \cdot f_s(s) ds \dots\dots\dots (2.6) \end{aligned}$$

Sebaliknya dengan menggunakan persamaan (2.5) diperoleh persamaan untuk ketidakandalan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \bar{R} = P(S \leq s) &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_s(S) \left[\int_{-\infty}^s f_s(s) ds \right] dS \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f_s(S) F_s(S) dS \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_s(S)] f_s(S) dS \dots\dots\dots (2.7) \end{aligned}$$

Andaikan didefinisikan variabel baru $y = S-s$, maka keandalan dapat didefinisikan sebagai :

$$R = P(y > 0) \dots\dots\dots (2.8)$$

Dan diasumsikan bahwa S dan s variabel acak yang lebih besar atau sama dengan 0. Fungsi densitas dari variabel y adalah :

$$f_y(y) = \int_s^{\infty} f_s(y+s) \cdot f_s(s) ds \dots\dots\dots (2.9)$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f_s(y+s)f_s(s)ds \\ 0 \\ \int_{-y}^{\infty} f_s(y+s)f_s(s)ds \\ -y \end{cases} \dots\dots\dots(2.10)$$

Karena itu peluang kegagalan komponen (ketidakandalan) menjadi :

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_{-y}^{\infty} f_s(y+s).f_s(s) dsdy \dots\dots\dots(2.11) \end{aligned}$$

dan keandalan komponen dinyatakan dengan :

$$\begin{aligned} R &= \int_0^{\infty} f_y(y)dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_s(y+s).f_s(s) dsdy \dots\dots\dots(2.12) \end{aligned}$$

PEMBAHASAN

Sesuai dengan permasalahan yang telah disebutkan dalam bab sebelumnya, disini akan diuraikan bagaimana model keandalan stress-strength untuk masing-masing distribusi.

4.1 Keandalan Komponen Apabila Stress dan Strength Berdistribusi Normal

Fungsi kepadatan peluang (pdf) dari stress (s) yang berdistribusi normal dinyatakan dengan :

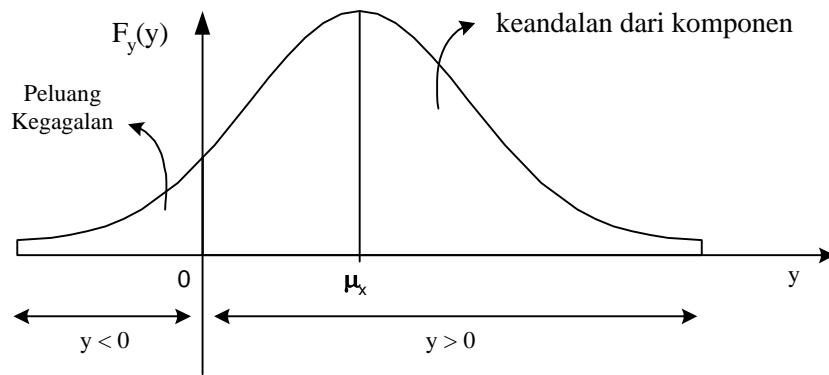
$$f_s(s) = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s - \mu_s}{\sigma_s} \right)^2 \right] ; -\infty < s < \infty \dots\dots\dots(3.1)$$

Sedangkan fungsi kepadatan peluang (pdf) dari strength (S) yang berdistribusi normal dinyatakan dengan :

$$f_s(S) = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{S - \mu_s}{\sigma_s} \right)^2 \right] ; -\infty < S < \infty \dots\dots\dots(3.2)$$

- Dimana : μ_s = mean (rata-rata) dari stress
- σ_s = standart deviasi stress
- μ_s = mean (rata-rata) dari strength
- σ_s = standart deviasi strength

Kemudian andaikan didefinisikan $y = S - s$, dimana variabel acak y juga berdistribusi normal dengan rata-rata $\mu_y = \mu_s - \mu_s$ dan standart deviasi $\sigma_y^2 = \sigma_s^2 + \sigma_s^2$. Fungsi kepadatan peluang dari variabel acak y dapat dilihat pada gambar sebagai berikut :



Gambar 3.1 Fungsi densitas dari variabel acak y

Dengan melihat gambar tersebut, keandalan (R) dapat dinyatakan dalam bentuk variabel acak y sebagai :

$$R = P(y > 0)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] dy \dots\dots\dots(3.3)$$

Andaikan $Z = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y}$ maka $\sigma_y dz = dy$.

Untuk $y = 0$, maka batas bawah dari Z adalah :

$$Z = \frac{0 - \mu_y}{\sigma_y} = -\frac{\mu_s - \mu_s}{\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_s^2}} \dots\dots\dots(3.4)$$

dan untuk $y \rightarrow +\infty$, maka batas atas dari Z adalah $Z \rightarrow +\infty$. Akibatnya :

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\mu_s - \mu_s}{\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_s^2}}}^{\infty} e^{-\frac{Z^2}{2}} dz \dots\dots\dots(3.5)$$

Variabel acak $Z = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y}$ disebut variabel normal standart, sehingga

keandalannya dapat ditentukan dengan melihat tabel normal pada lampiran. Dengan demikian persamaan keandalan diatas dapat dinyatakan sebagai :

$$R = 1 - \phi \left[-\frac{\mu_s - \mu_s}{\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_s^2}} \right] \dots\dots\dots(3.6)$$

4.2 Keandalan Komponen Apabila Stress dan Strength Berdistribusi Ekponensial

Fungsi kepadatan peluang (pdf) dari stress (s) yang berdistribusi eksponensial dinyatakan dengan : $f_s(s) = \lambda_s e^{-\lambda_s s}$; $0 \leq s < \infty$ (3.7)

Sedangkan fungsi kepadatan peluang (pdf) dari strength (S) yang berdistribusi eksponensial dinyatakan dengan : $f_s(S) = \lambda_s e^{-\lambda_s S}$; $0 \leq S < \infty$ (3.8)

Dari persamaan keandalan:

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} f_s(s) \left[\int_{-s}^{\infty} f_s(S) dS \right] ds$$

Dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} R &= \int_0^{\infty} f_s(s) \left[\int_s^{\infty} f_s(S) dS \right] ds \\ &= \int_0^{\infty} \lambda_s e^{-\lambda_s s} \left[e^{-\lambda_s s} \right] ds \\ &= \int_0^{\infty} \lambda_s e^{-(\lambda_s + \lambda_s) s} ds \\ &= \frac{\lambda_s}{\lambda_s + \lambda_s} \int_0^{\infty} (\lambda_s + \lambda_s) e^{-(\lambda_s + \lambda_s) s} ds \\ &= \frac{\lambda_s}{\lambda_s + \lambda_s} \dots\dots\dots(3.9) \end{aligned}$$

Andaikan dinyatakan bahwa nilai rata-rata strength adalah $\bar{S} = 1/\lambda_s$ dan nilai dari rata-rata stress adalah $\bar{s} = 1/\lambda_s$ maka keandalan tersebut menjadi :

$$\bar{R} = \frac{\bar{S}}{(\bar{S} + \bar{s})} \dots\dots\dots(3.10)$$

4.3 Keandalan Komponen Apabila Stress Berdistribusi Eksponensial Dan Strength Berdistribusi Normal

Fungsi kepadatan peluang (pdf) untuk strength (S) yang berdistribusi normal adalah :

$$f_s(S) = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{S - \mu_s}{\sigma_s}\right)^2\right]; \quad -\infty < S < \infty$$

dan fungsi kepadatan peluang (pdf) untuk stress yang berdistribusi eksponensial adalah:

$$f_s(s) = \lambda_s e^{-\lambda_s s}; \quad s \geq 0$$

dengan $\mu_s = 1/\lambda_s$ dan $\sigma_s = 1/\lambda_s$

Dari persamaan keandalan

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} f_s(S) \left[\int_{-\infty}^S f_s(s) ds \right] dS \quad \text{dan karena :}$$

$$\int_0^S f_s(s) ds = \int_0^S \lambda_s e^{-\lambda_s s} ds = 1 - e^{-\lambda_s S}$$

Akibatnya :

$$\begin{aligned} R &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{S - \mu_s}{\sigma_s}\right)^2\right] (1 - e^{-\lambda_s S}) dS \\ &= \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{S - \mu_s}{\sigma_s}\right)^2\right] dS - \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{S - \mu_s}{\sigma_s}\right)^2\right] e^{-\lambda_s S} dS \\ &= \left[1 - \phi\left(-\frac{\mu_s}{\sigma_s}\right) \right] - \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \left[\int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_s^2} \left((S - \mu_s + \lambda_s \sigma_s^2) + 2\mu_s \sigma_s - \lambda_s^2 \sigma_s^4 \right) \right] dS \right] \end{aligned} \dots\dots\dots(3.11)$$

Andaikan $t = \frac{S - \mu_s + \lambda_s \sigma_s^2}{\sigma_s}$ maka $\sigma_s dt = dS$ sehingga persamaan keandalan tersebut menjadi :

$$R = 1 - \phi\left(-\frac{\mu_s}{\sigma_s}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\mu_s - \sigma_s^2}{\sigma_s}}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}(2\mu_s \lambda_s - \lambda_s^2 \sigma_s^2)\right] dt$$

$$= 1 - \phi\left(-\frac{\mu_s}{\sigma_s}\right) - \exp\left[-\frac{1}{2}(2\mu_s\lambda_s - \lambda_s^2\sigma_s^2)\right] \left[1 - \phi\left(-\frac{\mu_s - \lambda_s\sigma_s^2}{\sigma_s}\right)\right] \dots\dots(3.12)$$

4.4 Keandalan Komponen Apabila Stress Berdistribusi Normal dan Strength Berdistribusi Ekponensial

Apabila fungsi densitas strength berdistribusi eksponensial dengan parameter λ_s dan stress berdistribusi normal dengan parameter μ_s dan σ_s , maka dari persamaan (2.3) dapat diperoleh persamaan keandalan yang baru yaitu :

$$\begin{aligned} R &= \int_{-\infty}^{\infty} f_s(s) \left[\int_s^{\infty} f_s(S) dS \right] ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{s - \mu_s}{\sigma_s}\right)^2\right] \cdot \exp[-\lambda_s s] ds \\ &= 1 - \phi\left(-\frac{\mu_s}{\sigma_s}\right) + \exp\left[-\frac{1}{2}(2\mu_s\lambda_s - \lambda_s^2\sigma_s^2)\right] \left[1 - \phi\left(-\frac{\mu_s - \lambda_s\sigma_s^2}{\sigma_s}\right)\right] \dots(3.13) \end{aligned}$$

4.5 Keandalan Komponen Apabila Stress dan Strength Berdistribusi Log Normal

Bentuk standart dari fungsi kepadatan log normal adalah :

$$f_y(y) = \frac{1}{y\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln y - \mu)^2\right] \quad y > 0 \quad \dots\dots\dots(3.14)$$

dimana y merupakan variabel acak. Parameter μ dan σ adalah nilai rata-rata (mean) dan merupakan simpangan baku (standard deviation) dari variabel $\ln y$ yang berdistribusi normal. Pertama dikembangkan suatu hubungan untuk distribusi log normal yang dibutuhkan untuk analisa selanjutnya.

Misalkan $x = \ln y$ maka $dx = (1/y)dy$. Dari rumus 3.14, diperoleh :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right] \quad -\infty < x < \infty$$

dan

$$E(x) = E[\ln y] = \mu_{\ln y}$$

dan

$$V[x] = \sigma^2 = V[\ln y] = \sigma_{\ln y}^2$$

Dengan mengingat eksponen dari e dalam persamaan:

$$E(x) = E(e^x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

sehingga

$$\begin{aligned}
x - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda - \mu}{\sigma} \right) &= x - \frac{1}{2\sigma^2} (x^2 - 2x\mu + \mu^2) \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2} (x^2 - 2\mu x - 2\sigma^2 x + \mu^2) \\
&= -\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{(\mu + \sigma^2)^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2} [x^2 - 2x(\mu + \sigma^2) + (\mu + \sigma^2)^2] \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2} (2\mu\sigma^2 + \sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} [x - (\mu + \sigma^2)]^2 \\
&= \mu + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{2\sigma^2} [x - (\mu + \sigma^2)]^2
\end{aligned}$$

Oleh sebab itu

$$\begin{aligned}
E(y) &= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\{x - (\mu + \sigma^2)\}^2}{2\sigma^2}\right] dx \\
&= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Untuk menghitung variansi dari y kita melihat bahwa

$$E(y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[2x - \frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2\right] dx \dots\dots\dots (3.15)$$

Mengingat eksponen dari e dalam jabaran dari E(y²) maka

$$\begin{aligned}
2x - \frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2 &= -\frac{1}{2\sigma^2} (-4\sigma^2 x + x^2 - 2\mu x + \mu^2) \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2} [x^2 - 2x(\mu + 2\sigma^2) + (\mu + 2\sigma^2)^2] - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{(\mu + 2\sigma^2)^2}{2\sigma^2} \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2} [x - (\mu + 2\sigma^2)]^2 + 2\mu + 2\sigma^2
\end{aligned}$$

Dengan mensubsitusi kembali, dapat disederhanakan seperti sebelumnya, sehingga

$$E(y^2) = \exp [2(\mu + \sigma^2)]$$

Karena itu dengan defenisi dari variansi, dapat ditulis

$$\begin{aligned}
V(y) &= \exp [2(\mu + \sigma^2)] - \{\exp [\mu + \sigma^2/2]\}^2 \\
&= [\exp (2(\mu + \sigma^2))] [\exp (\sigma^2) - 1] \dots\dots\dots (3.16)
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa

$$\frac{V(y)}{[E(y)]^2} = e^{\sigma^2} - 1$$

Sehingga diperoleh Standart Deviasi

$$\sigma^2 = \ln \left[\frac{V(y)}{[E(y)]^2} + 1 \right] \dots \dots \dots (3.17)$$

Dibuktikan dalam Persamaan 3.15 bahwa

$$E(y) = e^{\mu + \sigma^2/2}$$

Yang menunjukkan

$$\mu = \ln E(y) - \frac{1}{2} \sigma^2 \dots \dots \dots (3.18)$$

Jika \bar{y} merupakan median dari y , maka dapat ditulis:

$$0,5 = \int_0^{\bar{y}} \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln y - \mu)^2 \right] dy$$

Dengan menggunakan transformasi $x = \ln y$, dapat ditulis sebagai

$$0,5 = \int_{-\infty}^{\ln \bar{y}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln y - \mu)^2 \right] dx$$

menghasilkan

$$\mu = \ln \bar{y} \dots \dots \dots (3.19)$$

berarti

$$\bar{y} = e^{\mu}$$

Kini kembali ke masalah utama yang mana S dan s berdistribusi log normal, misalkan $y = S/s$, dimana mean $\ln y = \ln S - \ln s$. $\ln y$ berdistribusi normal karena $\ln S$ dan $\ln s$ berdistribusi normal

Fungsi kepadatan log normal cenderung positif dan penggunaan median akan lebih baik dan lebih mendekati pengukuran dari pusat tendensi untuk distribusi log normal daripada menggunakan mean. Akhirnya, antilog mean dari $\ln S$ adalah median dari $f_S(\cdot)$ dan antilog mean dari $\ln s$ adalah median $f_s(\cdot)$: maka

$$\bar{S} = e^{\mu_{\ln S}}$$

atau

$$\mu_{\ln S} = \ln \bar{S}$$

dan

$$\bar{S} = e^{\mu_{\ln S}}$$

atau

$$\mu_{\ln s} = \ln \bar{s}$$

dinamakan \bar{S} dan \bar{s} adalah median dari S dan s . Berdasarkan analogi,

$$\mu_{\ln y} = \ln \bar{y}$$

Diketahui bahwa y adalah distribusi log normal juga, tetapi

$$\mu_{\ln y} = \mu_{\ln S} - \mu_{\ln s} = \ln \bar{S} - \ln \bar{s} \dots\dots\dots (3.20)$$

Kombinasi dari dua persamaan, diperoleh

$$\ln \bar{y} = \ln \bar{S} - \ln \bar{s} = \ln \frac{\bar{S}}{\bar{s}}$$

Diketahui juga bahwa

$$\sigma_{\ln y} = \sqrt{\sigma_{\ln S}^2 + \sigma_{\ln s}^2} \dots\dots\dots (3.21)$$

Dari defenisi keandalan, diperoleh

$$R = P\left(\frac{S}{s} > 1\right) = P(y > 1) = \int_1^{\infty} f_y(y) dy$$

Misalkan $z = (\ln y - \mu_{\ln y})/\sigma_{\ln y}$. Maka z adalah variansi dari normal standart. Sekarang akan dicari batas integrasi yang baru dimana $y = 1$

$$z = \frac{\ln y - \mu_{\ln y}}{\sigma_{\ln y}} = -\frac{\ln \bar{S} - \ln \bar{s}}{\sqrt{\sigma_{\ln S}^2 - \sigma_{\ln s}^2}}$$

Selanjutnya dari persamaan 3.20 dan 3.21, dimana $y \rightarrow +\infty$ dan $z \rightarrow +\infty$.maka diperoleh keandalan sebagai berikut :

$$R = \frac{\int_{\frac{\ln \bar{S} - \ln \bar{s}}{\sqrt{\sigma_{\ln S}^2 - \sigma_{\ln s}^2}}^{\infty} \phi(z) dz}{\dots\dots\dots} (3.22)$$

dimana $\phi(z)$ adalah fungsi kepadatan peluang dari variasi normal standart z .

4.6 Keandalan Komponen Bila Stress dan Strength Berdistribusi Gamma

Fungsi kepadatan gamma untuk variabel acak adalah :

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} ; n > 0 , \lambda > 0 , 0 < x < \infty$$

dimana λ disebut parameter skala dan n disebut parameter bentuk. Untuk kasus dimana $\lambda = 1$, diperoleh :

$$f_s(S) = \frac{1}{\Gamma(m)} S^{m-1} e^{-S} \quad 0 < S < \infty$$

dan

$$f_s(s) = \frac{1}{\Gamma(n)} s^{n-1} e^{-s} \quad 0 < s < \infty$$

dengan menggunakan persamaan (2.9), dimana $y = S - s$ diperoleh :

$$f_y(y) = \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_0^{\infty} (y+s)^{m-1} e^{-(y+s)} s^{n-1} e^{-s} ds ; y > 0$$

Misalkan $v = s/y$. Maka $dv = (1/y)ds$. Sehingga diperoleh

$$f_y(y) = \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(n)} y^{m-n-1} e^{-y} \int_0^{\infty} v^{n-1} (1+v)^{m-1} e^{-2yv} dv$$

Karena itu

$$R = \int_0^{\infty} f_y(y) dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(n)} \int_0^{\infty} y^{m-n-1} e^{-y} \int_0^{\infty} v^{n-1} (1+v)^{m-1} e^{-2yv} dv$$

tetapi

$$\int_0^{\infty} y^{m+n-1} e^{-(1+2v)y} dy = \frac{\Gamma(m+n)}{(1+2v)^{m+n}}$$

oleh sebab itu

$$R = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{(1+v)^{m-1} v^{n-1}}{(1+2v)^{m+n}} dv$$

$$= \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^{1/2} (1-u)^{m-1} u^{n-1} du ; \quad u = v/(1+2v)$$

Integral diatas merupakan fungsi Beta yang tidak komplit yaitu $B_{1/2}(m,n)$, karena itu

$$R = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} B_{1/2}(m,n) \dots\dots\dots(3.23)$$

Selanjutnya untuk kasus dimana $\lambda \neq 1$. Diperoleh

$$f_s(S) = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} S^{m-1} e^{-\lambda S} ; \quad \lambda > 0, m > 0, 0 < S < \infty$$

dan

$$f_s(s) = \frac{\mu^n}{\Gamma(n)} S^{n-1} e^{-\mu s} ; \quad \mu > 0, n > 0, 0 < s < \infty$$

Dengan menggunakan persamaan (2.9) dapat diperoleh keandalan seperti sebelumnya,yaitu :

$$R = \int_0^{\infty} f_y(y) dy$$

$$= \frac{r^n \Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{(1+v)^{m-1} v^{n-1}}{[1+(1+r)v]^{m+n}} dv$$

dimana $r = \mu/\lambda$. Jika dimisalkan $u = rv / ((1+r) v)$. maka

$$R = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^{r/(1+r)} (1-u)^{m-1} u^{n-1} du$$

Karena itu ,keandalan dapat juga dijabarkan dalam bentuk fungsi beta yang tidak komplit seperti kasus sebelumnya,yaitu :

$$R = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} B_{r/(1+r)}(m,n)$$

4.7 Keandalan Komponen Apabila Stress dan Strength Berdistribusi Weibull

Fungsi Kepadatan Peluang untuk stress dan strength yang berdistribusi Weibull adalah :

$$f_s(S) = \frac{\beta_s}{\theta_s} \left(\frac{S - S_0}{\theta_s} \right)^{\beta_s - 1} \exp \left[- \left(\frac{S - S_0}{\theta_s} \right)^{\beta_s} \right] ; \quad S_0 < S < \infty$$

dan

$$f_s(s) = \frac{\beta_s}{\theta_s} \left(\frac{s - s_0}{\theta_s} \right)^{\beta_s - 1} \exp \left[- \left(\frac{s - s_0}{\theta_s} \right)^{\beta_s} \right] ; \quad S_0 < s < \infty$$

Dengan menggunakan persamaan(2.7),dapat diperoleh peluang kegagalan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \bar{R} = P[S < s] &= \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_S(S)] f_s(S) dS \\ &= \int_{S_0}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{S - S_0}{\theta_s} \right)^{\beta_s} \right] \frac{\beta_s}{\theta_s} \left(\frac{S - S_0}{\theta_s} \right)^{\beta_s - 1} \exp \left[- \left(\frac{S - S_0}{\theta_s} \right)^{\beta_s} \right] dS \end{aligned}$$

Misalkan

$$y = \left(\frac{S - S_0}{\theta_s} \right)^{\beta_s}$$

Kemudian

$$dy = \frac{\beta_s}{\theta_s} \left(\frac{S - S_0}{\theta_s} \right)^{\beta_s - 1} dS$$

dan

$$S = y^{1/\beta_s} \theta_s + S_0$$

Oleh sebab itu peluang kegagalan menjadi

$$\bar{R} = P[S < s] = \int_0^{\infty} e^{-y} \exp \left[- \left[\frac{\theta_s}{\theta_s} y^{1/\beta_s} + \left(\frac{S_0 - S_0}{\theta_s} \right)^{\beta_s} \right] \right] dy \dots \dots \dots (3.24)$$

sehingga keandalannya menjadi :

$$R = 1 - \left\{ \int_0^{\infty} e^{-y} \exp \left[- \left[\frac{\theta_s}{\theta_s} y^{1/\beta_s} + \left(\frac{S_0 - S_0}{\theta_s} \right)^{\beta_s} \right] \right] dy \right\} \dots \dots \dots (3.25)$$

DAFTAR PUSTAKA

- Beasley, Michael, "**Reliability for Engineers an Introduction**", Macmillan, Education Ltd., 1991.
- De Groot, Moris H., "**Probability and Statistics**", Addison –Wesley Publishing Company, second edison.
- Govil, A.K., "**Reliability Engineering**", Tata Mc. Grow Hill Publishing Company Limited, New Delhi, 1983
- Hariyanto, Samsudin, "**Pengujian Keandalan pada Model Stress-Strength**", Jurnal Science No.34 Juni 1996, 1996.
- Hines, Willam W and Montgomery Douglas C., "**Probabilita dan Statistik dalam Ilmu Rekayasa dan Manajemen**", Edisi kedua, Penerjemah Rudiansyah, pendamping Alder Haymans Marpaung, UI- PRESS, 1990
- Kapur, K.C. dan Lamberson L.R., "**Reliability in Engineering Design**", John Wiley And Sons, Inc. Canada, 1977